

למידת נתונים במערכות זמן אמת

פרויקט ניווט – אלגוריתם למציאת החדר

מועד הגשה : 31.08.23

נועם סגל 325725802

זהבה רוזנטל 326109501

תיאור האלגוריתם:

נעבוד עם קואורדינטות פולריות, וניעזר בתכנון דינאמי. נרצה להפריד את הגרף למקטעים להעברת פונקציות שמתארות את הצלעות.

נגדיר תת בעיה $D[i, m]$ בתור מחיר החלוקה האופטימלית ל- m מקטעים שנגמרים בנקודה i . נשמור טבלה D כזו שגודלה $(n + 1) \times (5 + 1)$. כלומר עבור הבעיה המקורית נרצה לפתור $D[n, 5]$.

נסמן את $s_{[j,i]}^2$ בתור ה-*Squared Error* שנשלם על העברת הפונקציה $\frac{a}{\cos(x-\phi)}$ (זו הפונקציה שמתארת צלע של המלבן בייצוג פולארי) בטווח של נקודות $p_j, \dots, p_i$ (לא בהכרח בצפיפות אחידה).

כאשר מתקיים:

$$\phi_m = \frac{\pi}{2}(m - 1)$$

ו- $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ הוא מספר הסגמנט שאליו מתאימים את הפונקציה (ובפרט ϕ_5 שקול ל- ϕ_1).

ניעזר בנוסחאות הנסיגה:

$$s_{[j,i]}^2 = s_{[j,i-1]}^2 + y_i^2 + \frac{\alpha_{[j,i-1]}^2}{\beta_{[j,i-1]}} - \frac{\alpha_{[j,i]}^2}{\beta_{[j,i]}}, \quad j < i$$

$$\alpha_{[j,i]} = \alpha_{[j,i-1]} + \frac{y_j}{\cos(x_i - \phi_m)}, \quad \beta_{[j,i]} = \beta_{[j,i-1]} + \frac{1}{\cos^2(x_i - \phi_m)}, \quad j < i$$

ותנאי העצירה הם:

$$\alpha_{[i,i]} = \frac{y_i}{\cos(x_i - \phi_m)}, \quad \beta_{[i,i]} = \frac{1}{\cos^2(x_i - \phi_m)}, \quad s_{[i,i]}^2 = 0$$

נמלא טבלה $A_{5 \times n \times n}$ שמכילה את כל ערכי $\alpha_{[j,i]}$ לכל אחד מערכי m .

נמלא טבלה $B_{5 \times n \times n}$ שמכילה את כל ערכי $\beta_{[j,i]}$ לכל אחד מערכי m .

נמלא טבלה $S_{5 \times n \times n}$ עם כל ערכי $s_{[j,i]}^2$ (ניעזר בטבלאות A, B) לכל אחד מערכי m .

נמלא טבלה $D_{(n+1) \times (5+1)}$ כאשר $k = 5$ מספר המקטעים, לפי נוסחת הנסיגה:

$$D[i, m] = \begin{cases} \min_{m \leq j \leq i} \{D[j-1, m-1] + s_{[j,i]}^2\}, & 1 \leq i \leq n, 1 \leq m \leq 5 \\ 0, & i = 0 \vee m = 0 \end{cases}$$

לבסוף כדי למצוא את החלוקה האופטימלית של הכל ניעזר בנוסחת הנסיגה:

$$B[i, m] = \operatorname{argmin}_{m \leq j \leq i} \{D[j-1, m-1] + s_{[j,i]}^2\}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq m \leq 5$$

שנאחסן בטבלה B בגודל $n \times 5$.

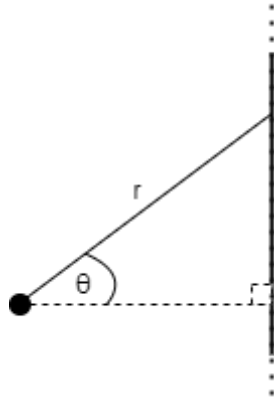
ולאחר שמילאנו את הטבלה B ניתן לבצע backtracking החל מ- $B[n, 5]$ ולהחזיר את כל ערכי j הרלוונטיים ולפיהם תוגדר החלוקה של המערך.

לבסוף כדי להעביר את הפונקציות במקטעים נעזר בכך שמתקיים $a = \frac{\alpha}{\beta}, \phi = \frac{\pi}{2}(m-1)$.

הוכחת נכונות

תחילה נוכיח שבכל סגמנט נרצה למצוא פונקציה $y = \frac{a}{\cos(x)}$:

נסתכל על תחילה על מרחק נקודה מקו ישר, כתלות בזווית של הנקודה ביחס לאנך אל הקו הישר הזה:



המטרה שלנו היא למצוא את ערכו של r .

נסמן את אורכו של האנך אל הצלע (הקו המקווקו) ב- a , ונשים לב כי מתקיים:

$$\cos \theta = \frac{a}{r}$$

ולכן:

$$r = \frac{a}{\cos \theta}$$

וזה גם הגיוני, כי זה אומר שיש אסימפטוטה אנכית כשהזווית מתקרבת לתשעים מעלות, והקווים הופכים למקבילים, כלומר המרחק r שואף לאינסוף. בנוסף, כאשר יש לנו k צלעות, מתקבלת פונקציה מוגדרת למקוטעין, כך שבכל תחום זוויות שחוסם צלע כלשהי, נעבוד עם a שערכו הוא אורך האנך ממרכז המצולע אל הצלע המתאימה, לפי התחום שבחרנו. ■

בנוסף, כל פעם שנתאים פונקציה כזו נרצה לוודא שנקודת המינימום שלה נמצאת ב- $x = 0$ כך שהפאזה של הקוסינוס תתאים. ניתן לראות שבסגמנט הראשון לא צריך להפחית כלום מהפאזה, בסגמנט השני $\frac{\pi}{2}$, בשלישי π , ברביעי $\frac{3\pi}{2}$ ובחמישי שוב לא צריך להפחית כלום כי הוא מתחבר לראשון:

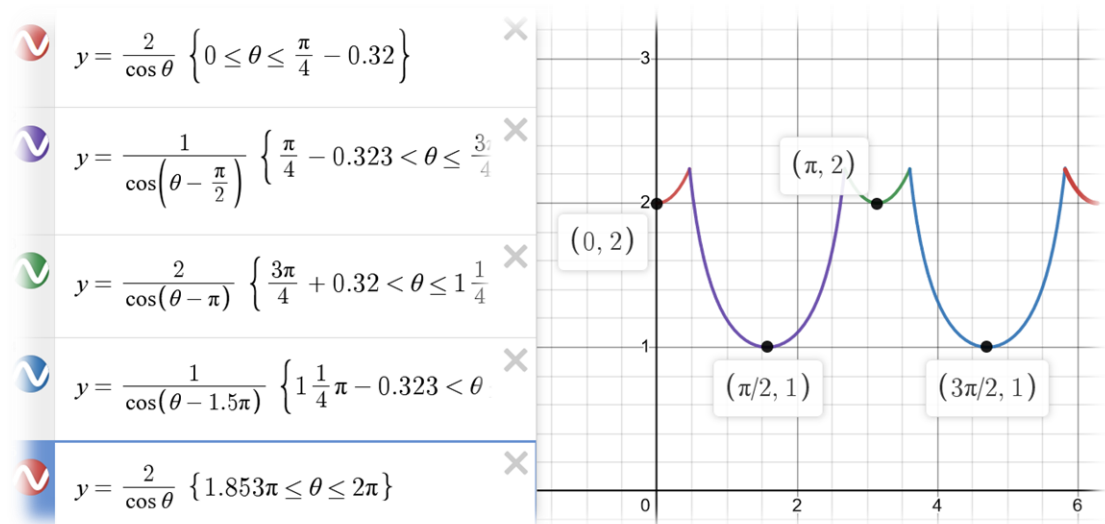


Figure 1 שינוי הפאזה של הקוסינוס כתלות בסגמנט

לכן בהינתן שאנחנו יודעים איזה מספר סגמנט אנחנו מתאימים, נרצה למזער את השגיאה:

$$\min_a \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{\cos(x_i - \phi)} - y_i \right)^2$$

נגזור עבור הפרמטר a ונשווה לאפס כדי למצוא אופטימום:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{\cos(x_i - \phi)} - y_i \right)^2 = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos(x_i - \phi)} \left(\frac{a}{\cos(x_i - \phi)} - y_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos^2(x_i - \phi)} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\cos(x_i - \phi)}$$

לכן הפרמטר האופטימלי יהיה:

$$a_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\cos(x_i - \phi)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos^2(x_i - \phi)}}$$

כעת נגדיר:

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\cos(x_i - \phi)}, \quad \beta_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos^2(x_i - \phi)}$$

לכן נוסחת נסיגה ל- a_n היא:

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n-1} + \frac{y_n}{\cos(x_n - \phi)}}{\beta_{n-1} + \frac{1}{\cos^2(x_n - \phi)}}$$

נמצא נוסחת נסיגה לסכום ריבועי המרחקים $s_{[j,i]}^2$:

$$\begin{aligned}
s_{[j,i]}^2 &= \sum_{k=j}^i \left(y_k - \frac{a_{[j,i]}}{\cos(x_k - \phi)} \right)^2 = \sum_{k=j}^i y_k^2 - \sum_{k=j}^i 2y_k \frac{a_{[j,i]}}{\cos(x_k - \phi)} + \sum_{k=j}^i \left(\frac{a_{[j,i]}}{\cos(x_k - \phi)} \right)^2 \\
&= \sum_{k=j}^i y_k^2 - 2a_{[j,i]} \sum_{k=j}^i \frac{y_k}{\cos(x_k - \phi)} + a_{[j,i]}^2 \sum_{k=j}^i \left(\frac{1}{\cos(x_k - \phi)} \right)^2 \\
&= \sum_{k=j}^i y_k^2 - 2a_{[j,i]} \cdot \alpha_{[j,i]} + a_{[j,i]}^2 \cdot \beta_{[j,i]}
\end{aligned}$$

$$s_{[j,i]}^2 = s_{[j,i-1]}^2 + y_i^2 + 2a_{[j,i-1]}\alpha_{[j,i-1]} - a_{[j,i-1]}^2\beta_{[j,i-1]} - 2a_{[j,i]}\alpha_{[j,i]} + a_{[j,i]}^2\beta_{[j,i]}$$

$$s_{[j,i]}^2 = s_{[j,i-1]}^2 + y_i^2 + 2 \frac{\alpha_{[j,i-1]}^2}{\beta_{[j,i-1]}} - \frac{\alpha_{[j,i-1]}^2}{\beta_{[j,i-1]}} - 2 \frac{a_{[j,i]}^2}{\beta_{[j,i]}} + \frac{a_{[j,i]}^2}{\beta_{[j,i]}}$$

$$s_{[j,i]}^2 = s_{[j,i-1]}^2 + y_i^2 + \frac{\alpha_{[j,i-1]}^2}{\beta_{[j,i-1]}} - \frac{a_{[j,i]}^2}{\beta_{[j,i]}}$$

לכן מתקבלת נוסחת הנסיגה:

$$s_{[j,i]}^2 = s_{[j,i-1]}^2 + y_i^2 + \frac{\alpha_{[j,i-1]}^2}{\beta_{[j,i-1]}} - \frac{a_{[j,i]}^2}{\beta_{[j,i]}}$$

$$\alpha_{[j,i]} = \alpha_{[j,i-1]} + \frac{y_j}{\cos(x_i - \phi)}, \quad \beta_{[j,i]} = \beta_{[j,i-1]} + \frac{1}{\cos^2(x_i - \phi)}, \quad j < i$$

ותנאי העצירה הם:

$$\alpha_{[i,i]} = \frac{y_i}{\cos(x_i - \phi)}, \quad \beta_{[i,i]} = \frac{1}{\cos^2(x_i - \phi)}, \quad s_{[i,i]}^2 = 0$$

לבסוף, נוכיח את הנוסחה:

$$D[i, m] = \begin{cases} \min_{m \leq j \leq i} \{D[j-1, m-1] + s_{[j,i]}^2\}, & 1 \leq i \leq n, 1 \leq m \leq 3 \\ 0, & i = 0 \vee m = 0 \end{cases}$$

נסמן ב- j את האינדקס של האיבר הראשון בתת המערך האחרון עבור פתרון אופטימלי $D[i, m]$. מכאן ניתן לראות ש- $D[j-1, m-1]$ ייתן פתרון אופטימלי עבור $j-1$ הערכים הללו ב- $m-1$ חלוקות, כי אם לא אז היה לנו פתרון אופטימלי אחר של $D[i, m]$ ולא היינו לוקחים את j מלכתחילה.

לכן מאחר שעוברים על כל ערכי j האפשריים אז נמצא את j האופטימלי הזה ומכאן נובעת נוסחת הנסיגה.

בנוסף נכונות נוסחת הנסיגה B שקולה לנכונות של D כי זה פשוט $\argmin$ במקום $\min$.

ניתוח סיבוכיות:

לפי הגדרת נוסחאות הנסיגה, כדי למצוא את הערך המינימלי של תא כלשהו ב- D/B נחוצים $O(n)$ צעדים כי עוברים על כל ערכי j האפשריים. ולפי גודל הטבלה צריך לחשב $O(n)$ רקורסיות כאלה.

לבסוף מבצעים Backtracking על B בסיבוכיות זמן $O(1) = O(5)$.

מאחר שבכל צעד כל החישובים מתבצעים ב- $O(1)$ זמן אזי סיבוכיות הזמן הכוללת היא $O(n^2)$.